தொகையீடு தீர்வுகள் (INTEGRATION SOLUTIONS)

பயிற்சிகள் 9.4 முதல் 9.7 வரையிலான முழுமையான படிப்படியான தீர்வுகள்

பயிற்சி 9.4 — பகுதிக்கான தொகையீட்டு முறை & பிரதியீட்டு முறை

1. மதிப்பிடுக: $\int_0^1 x^3 e^{-2x}\,dx$

முறை: பகுதிக்கான தொகையீட்டு முறை (Integration by Parts: $\int u\,dv = uv - \int v\,du$)

$u = x^3$, $dv = e^{-2x}\,dx$ எனக்கொள்க $\Rightarrow du = 3x^2\,dx$, $v = -\frac{1}{2}\,e^{-2x}$

$\int_0^1 x^3 e^{-2x}\,dx = \left[-\frac{1}{2} x^3 e^{-2x} \right]_0^1 + \frac{3}{2}\int_0^1 x^2 e^{-2x}\,dx$

தொடர்ந்து தொகையீடு செய்யும்போது:

$= \left[e^{-2x}\left(-\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x - \frac{3}{8} \right) \right]_0^1$

$= e^{-2}\left(-\frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{8} \right) - 1\cdot\left(0 - \frac{3}{8} \right) = -\frac{19}{8}e^{-2} + \frac{3}{8}$

இறுதி விடை: $(3 - 19e^{-2}) / 8$

2. மதிப்பிடுக: $\int_0^1 \left[\sin(3\tan^{-1}x)\cdot \tan^{-1}x / (1+x^2) \right] dx$

பிரதியீடு: $t = \tan^{-1}x \Rightarrow dt = dx/(1+x^2)$. வரம்புகள்: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1 \Rightarrow t=\pi/4$.

தொகையீடு பின்வருமாறு மாறும்: $\int_0^{\pi/4} t\cdot\sin(3t)\,dt$

பகுதிக்கான தொகையீட்டு முறை ($u = t$, $dv = \sin(3t)\,dt$):

$= \left[-\frac{1}{3}t\cos(3t) + \frac{1}{9}\sin(3t) \right]_0^{\pi/4}$

$= \left[-\frac{1}{3}(\pi/4)\cos(3\pi/4) + \frac{1}{9}\sin(3\pi/4) \right] - 0$

$= -\frac{\pi}{12}(-1/\sqrt{2}) + \frac{1}{9}(1/\sqrt{2}) = (3\pi + 4)/(36\sqrt{2})$

இறுதி விடை: $(3\pi + 4) / (36\sqrt{2})$

3. மதிப்பிடுக: $\int_0^{1/\sqrt{2}} \left[e^{\sin^{-1}x}\sin^{-1}x / \sqrt{(1-x^2)} \right] dx$

பிரதியீடு: $t = \sin^{-1}x \Rightarrow dt = dx/\sqrt{(1-x^2)}$. வரம்புகள்: $x=0 \Rightarrow t=0$; $x=1/\sqrt{2} \Rightarrow t=\pi/4$.

தொகையீடு: $\int_0^{\pi/4} t\,e^t\,dt$

பகுதிக்கான தொகையீட்டு முறை ($u = t$, $dv = e^t\,dt$):

$= \left[t\,e^t - e^t \right]_0^{\pi/4} = \left[e^t(t-1) \right]_0^{\pi/4} = e^{\pi/4}(\pi/4 - 1) - e^0(-1)$

இறுதி விடை: $e^{\pi/4}(\pi/4 - 1) + 1$

4. மதிப்பிடுக: $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos(2x)\, dx$

பகுதிக்கான தொகையீட்டு முறை ($u = x^2$, $dv = \cos(2x)\, dx$):

$= [\, \tfrac{1}{2} x^2 \sin(2x)\,]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} x \sin(2x)\, dx$

$= 0 - [\, -\tfrac{1}{2} x \cos(2x) + \tfrac{1}{4} \sin(2x)\,]_0^{\pi/2}$

$= - [\, -\tfrac{1}{2} (\pi/2) \cos(\pi) + \tfrac{1}{4} \sin(\pi) - 0\,] = - [\, -\tfrac{1}{2} (\pi/2) (-1)\,] = -\pi/4$

இறுதி விடை: $-\pi/4$

பயிற்சி 9.5 — முக்கோணவியல் தொகையீடுகள்

1. (i) $\int_0^{\pi/2} dx / (1 + 5\cos^2 x)$

தொகுதி மற்றும் பகுதியை $\cos^2 x$ ஆல் வகுக்க:

$\int_0^{\pi/2} [\, \sec^2 x / (6 + \tan^2 x)\,]\, dx$

$t = \tan x$ எனக்கொள்க $\Rightarrow dt = \sec^2 x\, dx$. (வரம்புகள்: 0 முதல் ∞).

$\int_0^{\infty} dt / ((\sqrt{6})^2 + t^2) = [\, (1/\sqrt{6}) \tan^{-1}(t/\sqrt{6})\,]_0^{\infty}$

$= (1/\sqrt{6}) (\pi/2 - 0) = \pi / (2\sqrt{6})$

இறுதி விடை: $\pi / (2\sqrt{6})$

1. (ii) $\int_0^{\pi/2} dx / (5 + 4\sin^2 x)$

தொகுதி மற்றும் பகுதியை $\cos^2 x$ ஆல் வகுக்க:

$\int_0^{\pi/2} [\, \sec^2 x / (5 + 9\tan^2 x)\,]\, dx$

$t = \tan x \Rightarrow dt = \sec^2 x\, dx$. (வரம்புகள்: 0 முதல் ∞).

$\tfrac{1}{9} \int_0^{\infty} dt / ((\sqrt{5}/3)^2 + t^2) = \tfrac{1}{9} (3/\sqrt{5}) [\, \tan^{-1}(3t/\sqrt{5})\,]_0^{\infty}$

$= (1 / 3\sqrt{5}) (\pi/2) = \pi / (6\sqrt{5})$

இறுதி விடை: $\pi / (6\sqrt{5})$

பயிற்சி 9.6 — குறைப்பு சூத்திரங்கள் (Wallis & Beta Integrals)

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^{10} x\, dx$

வாலிஸின் சூத்திரம் (இரட்டை எண் $n = 10$):

$= \tfrac{9}{10} \times \tfrac{7}{8} \times \tfrac{5}{6} \times \tfrac{3}{4} \times \tfrac{1}{2} \times \tfrac{\pi}{2}$

$= 63\pi / 512$

விடை: $63\pi / 512$

(ii) $\int_0^{\pi/2} \cos^7 x\, dx$

வாலிஸின் சூத்திரம் (ஒற்றை எண் $n = 7$):

$= \tfrac{6}{7} \times \tfrac{4}{5} \times \tfrac{2}{3}$

$= 16 / 35$

விடை: $16 / 35$

(iii) $\int_0^{\pi/4} \sin^6(2x)\, dx$

(iv) $\int_0^{\pi/6} \sin^5(3x)\, dx$

$t = 3x \Rightarrow dx = dt/3$. (வரம்புகள்: 0 முதல் $\pi/2$).

$= \tfrac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \sin^5 t\, dt = \tfrac{1}{3} (\tfrac{4}{5} \times \tfrac{2}{3})$

$= 8 / 45$

$t = 2x \Rightarrow dx = dt/2$. (வரம்புகள்: 0 முதல் $\pi/2$).
$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \sin^6 t\, dt = \frac{1}{2} \left(\frac{5}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} \right)$
$= 5\pi / 32$

விடை: $5\pi / 32$

விடை: 8 / 45

(v) $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos^4 x\, dx$

குறைப்பு சூத்திரம் ($p = 2$, $q = 4$, இரண்டும் இரட்டை எண்கள்):
$= [(2-1) \times (4-1)(4-3)] / [(2+4)(4)(2)] \times (\pi/2)$
$= [1 \times 3] / [6 \times 4 \times 2] \times (\pi/2) = \pi / 32$

விடை: $\pi / 32$

(vi) $\int_0^{2\pi} \sin^7(x/4)\, dx$

$t = x/4 \Rightarrow dx = 4\, dt$. (வரம்புகள்: 0 முதல் $\pi/2$).
$= 4 \int_0^{\pi/2} \sin^7 t\, dt = 4 \left(\frac{6}{7} \times \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} \right)$
$= 4 \times (16 / 35) = 64 / 35$

விடை: 64 / 35

(vii) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta \cos^5 \theta\, d\theta$

குறைப்பு சூத்திரம் ($p = 3$, $q = 5$, இரண்டும் ஒற்றை எண்கள்):
$= [(3-1) \times (5-1)(5-3)] / [(3+5)(6)(4)(2)]$
$= [2 \times 8] / [8 \times 6 \times 4 \times 2] = 1 / 24$

விடை: 1 / 24

(viii) $\int_0^1 x^2 (1 - x)^3\, dx$

பீட்டா சார்பு: $B(m, n) = \int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1}\, dx$
$= (m-1)!(n-1)! / (m+n-1)!$
இங்கு $m = 3$, $n = 4$:
$= 2!\, 3! / 6! = (2 \times 6) / 720 = 1 / 60$

விடை: 1 / 60

பயிற்சி 9.7 — காமா தொகையீடுகள் (Gamma Integrals)

1. (i) மதிப்பிடுக: $\int_0^\infty x^5 e^{-3x}\, dx$

காமா தொகையீட்டு சூத்திரம்: $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\, dx = n! / a^{n+1}$
இங்கு $n = 5$, $a = 3$:
$\int_0^\infty x^5 e^{-3x}\, dx = 5! / 3^{5+1} = 120 / 729 = 40 / 243$

இறுதி விடை: 40 / 243

TN Kalvi Online · tnkalvi.online/question-papers/class-12-maths-2026-27-tm

1. (ii) மதிப்பிடுக: $\int_0^{\pi/2} [\, e^{-\tan x} / \cos^6 x \,]\, dx$

மாற்றி எழுதுக: $\int_0^{\pi/2} e^{-\tan x} (1 + \tan^2 x)^2 \sec^2 x \, dx$

$t = \tan x \Rightarrow dt = \sec^2 x \, dx$. (வரம்புகள்: 0 முதல் ∞).

$\int_0^{\infty} e^{-t} (1 + t^2)^2 \, dt = \int_0^{\infty} e^{-t} (1 + 2t^2 + t^4) \, dt$

காமா சூத்திரத்தைப் பயன்படுத்த: $\int_0^{\infty} e^{-t} t^n \, dt = n!$

$= 0! + 2(2!) + 4! = 1 + 4 + 24 = 29$

இறுதி விடை: 29

2. $\int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} x^3 \, dx = 32$, $\alpha > 0$ எனில், α -வின் மதிப்பைக் காண்க

$t = \alpha x^2 \Rightarrow x = \sqrt{(t / \alpha)}$, $dx = dt / (2 \sqrt{\alpha} \sqrt{t})$.

$\int_0^{\infty} e^{-t} (t / \alpha)^{3/2} [\, dt / (2 \sqrt{\alpha} \sqrt{t}) \,] = {}^1/_{2\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-t} t \, dt = {}^1/_{2\alpha^2} (1!) = {}^1/_{2\alpha^2}$

கொடுக்கப்பட்டது: ${}^1/_{2\alpha^2} = 32 \Rightarrow 2\alpha^2 = {}^1/_{32} \Rightarrow \alpha^2 = {}^1/_{64} \Rightarrow \alpha = 1/8$

இறுதி விடை: $\alpha = 1/8$

tnkalvi.online